

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcije 11 i 12
Limesi i derivacije

Poglavlje 1

Limesi i derivacije

1.0.1 Limesi

Limes funkcije $f(x)$ kada x teži nekoj točki a (ovdje a može označavati i $\pm\infty$) možemo intuitivno shvatiti kao vrijednost kojoj funkcija f teži kada x ide u a . Označavamo ga sa $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i on može, ali i ne mora postojati.

Zadatak 1 *Odredite sljedeće limese:*

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4+6x+2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} (\sin x)$

Rješenje:

(a) Ako x ide u ∞ , onda $x^2 + 1$ ide također u ∞ pa imamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

(b) Funkcija $f(x) = \frac{2}{x^4+6x+2}$ je dobro definirana u nuli pa samo uvrstimo $x = 0$ i dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4+6x+2} = \frac{2}{0+0+2} = 1$$

(c) Analogno kao i gore:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sin x) = \sin 2$$

Vrijedi sljedeće: ako postoje limesi $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, onda

1) $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$,

2) $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$,

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \text{ako} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0.$$

Zadatak 2 *Nadite sljedeće limese koristeći gornja svojstva limesa:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} \cdot (x^2 + 7x - 3)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} (e^x + 2\sqrt{3x})$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1}$$

Rješenje:

(a) Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} \cdot (x^2 + 7x - 3) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 7x - 3) = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2} \cdot (\lim_{x \rightarrow 1} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 1} (7x - 3)) &= \frac{0}{2} \cdot (1 + 4) = 0 \cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

(c) Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2x+6)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3+x+1)} = \\ &= \frac{0+6}{0+0+1} = \frac{6}{1} = 6 \end{aligned}$$

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u x kada $x \rightarrow \infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa x^n gdje je n najveća potencija tih polinoma. analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka sa iracionalnim izrazima.

Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a) \neq 0$ ili $Q(a) \neq 0$, limes

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a) = Q(a) = 0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x-a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

Zadatak 3 *Izračunajte:*

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$$

$$(d) \lim_{h \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$$

Rješenje:

(a) Dijelimo s najvećom potencijom od x i brojnik i nazivnik, a to je očito x^5 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 6x^3 + 3x + 1}{x^5 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{6}{x^5}} = \frac{2}{1} = 2$$

jer faktori oblika $\frac{a}{x^n}$ gdje je a neka konstanta a n prirodan broj očito idu u nulu ako x ide u ∞ .

(c) Oba polinoma (i onaj u brojniku i onaj u nazivniku) poprimaju konkretnu vrijednost za $x = 2$. Kako vrijednost nazivnika nije nula, limes dobivamo direktno:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{2^3 - 3 \cdot 2 + 2}{2^4 - 4 \cdot 2 + 3} = \frac{4}{11}$$

(e) Ovdje su za $x = 1$ i brojnik i nazivnik nula. Dijelimo, dakle, oiba polinoma sa $x - 1$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1 + 2 + 3}{1 - 2 + 2} = 6 \end{aligned}$$

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

1. Izračunajte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{1})$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1+x}}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$

Rješenje:

(a) Koristimo jednakost $1 - x = (1 - \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})$ za racionalizaciju:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) = 3 \end{aligned}$$

(f) Opet racionaliziramo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x) \frac{(\sqrt{x(x+a)} + x)}{(\sqrt{x(x+a)} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+a) - x^2}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)} + x} \end{aligned}$$

Tu je najveća potencija u brojniku i nazivniku x pa dijelimo s tim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\sqrt{x(x+a)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} = \frac{a}{2}$$

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a ($a \neq x$). Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = C,$$

vrijedi sljedeće:

- 1) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

gdje je $0 \leq A \leq +\infty$ i $-\infty < B < +\infty$ tada je $C = A^B$.

- 2) ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ onda C pronalazimo neposredno,
3) ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, onda stavljamo $f(x) = 1 + \alpha(x)$ gdje $\alpha(x) \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow a$ i prema tome

$$C = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila lako dobivamo da je općenito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Zadatak 4 *Izračunajte:*

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2 \cos x}{\pi-3x}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2} x}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$ |

Rješenje:

- (a) Koristimo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \frac{\sin 5x}{5x}}{7x \frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{7}$$

(b) Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\cos x} = 8 \end{aligned}$$

jer $\cos 0 = 1$.

Zadatak 5 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Rješenje:

(a) Ovo je slučaj (1) kod limesa oblika $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = C$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

(e) Ovo je slučaj (3) jer imamo očito 1^∞ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3-4}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{x+3} \right) \right)^{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[\left(1 + \left(-\frac{4}{x+3} \right) \right)^{-\frac{x+3}{4}} \right]^{-\frac{4}{x+3}} \right\}^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-4 \frac{x+2}{x+3}} = e^{-4} \end{aligned}$$

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

Zadatak 6 *Izračunajte:*

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2}$

Rješenje:

(a) Koristeći svojstva logaritamske funkcije dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x+1}{x+2} \right) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+2} = \ln 2$$

(e) Imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left\{ a^x - 1 = t, x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a$$

1.0.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hospitalovo pravilo: koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Drugim riječima, ako imamo f i g funkcije takve da $\frac{f(x)}{g(x)}$ teži ka $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ ako $x \rightarrow a$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji.

Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x = a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd.

Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0} \right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty} \right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty - \infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x) \left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, onda razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0} \right).$$

Zadatak 7 Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1)$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

Rješenje:

- (a) Ovo je očito situacija $\frac{\infty}{\infty}$ pa primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

jer $(e^x)' = e^x$, $(x^2)' = 2x$ i konačno $(2x)' = 2$

- (c) Ovo je slučaj $\frac{0}{0}$, primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} &= L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \\ &= L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{-2 \cos x \sin x + 3 \cos^2 x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x}{-2 \cos x + 3 \cos^2 x} = \frac{3}{-2 + 3} = 3 \end{aligned}$$

1.0.3 Deriviranje funkcija

Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije f u točki x_0 nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kada h teži u nulu, odnosno

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0 .

Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje *koeficijent smjera* tangente u točki x_0 na graf funkcije f . Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije*.

Zadatak 8 Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:

- $f(x) = x$,
- $f(x) = x^3$,
- $f(x) = \sqrt{x}$,
- $f(x) = \sin x$.

Rješenje:

- (b) Tražimo derivaciju u točki x_0 . Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^3 - (x_0)^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2h + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2 \end{aligned}$$

Znači, općenito možemo reći da je $(x^3)' = 3x^2$, odnosno derivacija funkcije x^3 je funkcija $3x^2$.

Osnovna pravila deriviranja: Neka je c konstanta a f i g funkcije koje imaju derivacije. Onda je

- 1) $(c)' = 0$,
- 2) $(x)' = 1$,
- 3) $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- 4) $(cf)' = cf'$,
- 5) $(fg)' = f'g + fg'$,
- 6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ($g \neq 0$).

Zadatak 9 Izračunajte derivacije sljedećih funkcija koristeći gornja pravila:

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$ | (e) $f(x) = 6 \sin x + \cos x$ |
| (b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ | (f) $f(x) = x^2 \tan x$ |
| (c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$ | (g) $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$ |
| (d) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ | (h) $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ |

Rješenje:

(e) Imamo:

$$(6 \sin x + \cos x)' = (6 \sin x)' + (\cos x)' = 6(\sin x)' - \sin x = 6 \cos x - \sin x$$

(g) Imamo:

$$\begin{aligned} ((x^3 + 5x)e^x)' &= (x^3 + 5x)'e^x + (x^3 + 5x)(e^x)' = ((x^3)' + (5x)')e^x + (x^3 + 5x)e^x = \\ &= (3x^2 + 5)e^x + (x^3 + 5x)(e^x) \end{aligned}$$

Pravilo deriviranja složenih funkcija: Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije f i g imaju derivacije u $g(x)$, tj x , onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Zadatak 10 Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = \sqrt{\frac{5 \sin x - \cos x}{x}}$ | (e) $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln \sqrt{x} + x$ |
| (b) $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$ | (f) $f(t) = t^2 \sin e^t$ |
| (c) $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$ | (g) $f(x) = \left(\frac{ax^n+b}{cx^n-d}\right)^m$ |
| (d) $f(x) = \ln(4 \sin x - \arccos 2x)$ | (h) $f(x) = \arctan \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}$ |

Rješenje:

(b) Imamo:

$$(\cos(xe^x+x^2))' = -\sin(xe^x+x^2)(xe^x+x^2)' = -\sin(xe^x+x^2)(e^x+xe^x+2x)$$

(h) Deriviramo:

$$\begin{aligned} \left(\arctan \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2} \left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \\ &= \frac{1}{1+\frac{(x^3+x)^2}{x^2+1}} \frac{(x^3+x)'\sqrt{x^2+1} - (x^3+x)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{x^2+1+(x^3+x)^2} \left((3x^2+1)\sqrt{x^2+1} - (x^3+x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \end{aligned}$$

Zadatak 11 Izračunajte $f'(x)$ ako je

$$(a) f(x) = |x|, \quad (b) f(x) = x|x|, \quad (c) f(x) = \ln|x|.$$

Zadatak 12 Izračunajte $f'(x)$ i $f'(0)$ ako je $f(x) = e^{-5x} \sin 3x$.

Rješenje: Imamo

$$f'(x) = (e^{-5x} \sin 3x)' = -5e^{-5x} \sin 3x + 3e^{-5x} \cos 3x$$

i specijalno je vrijednost derivacije u točki $x = 0$ jednaka
 $f'(0) = -5e^0 \sin 0 + 3e^0 \cos 0 = 3$.

Zadatak 13 Pokažite da je $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ ako je $f(x) = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Zadatak 14 Pokažite da je $((\sin x)^n \cos(nx))' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$.

Zadatak 15 Pokažite da funkcija $y = xe^{-x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $xy' = (1-x)y$.

Rješenje: Tražimo derivaciju zadane funkcije, $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Sada lijeva strana jednakost $xy' = (1-x)y$ izgleda:

$$xy' = x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}(1-x)$$

dok desna daje

$$(1-x)y = (1-x)xe^{-x}$$

To je očito isto stoga zaključujemo da vrijedi $xy' = (1-x)y$, odnosno y zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu.